Curiosidades sobre o Cartaz 2013

O cartaz da OBMEP 2013 apresenta, de modo simplificado e como proposta para preparação de aulas, a maneira com que os gregos antigos determinaram aproximadamente as grandezas que aparecem na tabela abaixo, usando observações astronômicas, semelhança de triângulos e resultados elementares sobre paralelas e transversais.

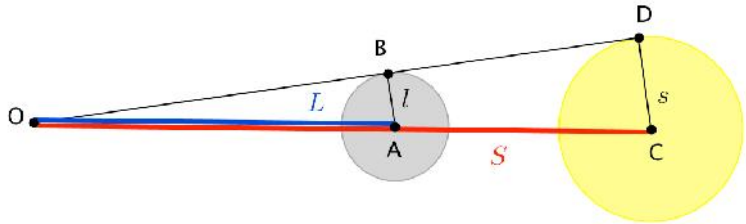
t	raio da Terra
l	raio da Lua
s	raio do sol
L	distância da Terra à Lua
S	distância da Terra ao Sol

A ordem das ideias que seguem é a seguinte:

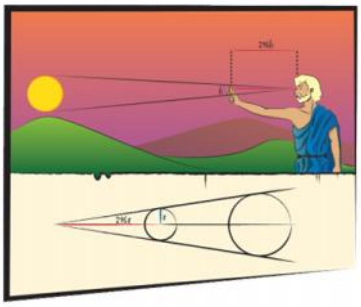
- determinar l e L em função de t;
- determinar o valor de t, calculando assim os valores de l e L;
- discutir brevemente a determinação de s e S.

Fazemos ao longo do texto algumas suposições no intuito de facilitar a exposição. Duas delas são (1) supor que a Terra, a Lua e o Sol estão sempre no mesmo plano no espaço e (2) supor que as órbitas de Lua em torno da Terra e da Terra em torno do Sol são circulares (essas órbitas são, na realidade, elípticas). Outras simplificações de caráter geométrico são apontadas quando pertinente.

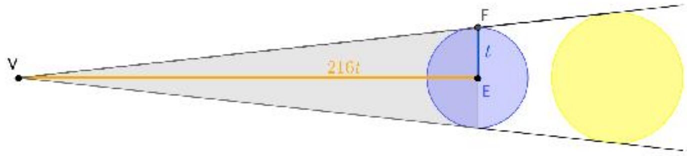
Começamos com um fato astronômico importante: os diâmetros aparentes da Lua e do Sol, vistos da Terra, são os mesmos. Isso pode ser verificado durante um eclipse solar, quando o disco da Lua oculta exatamente o disco do Sol. Essa observação dá origem ao diagrama que se segue.



Nesse diagrama, o ponto O representa o olho do observador e os pontos A e C os centros da Lua e do Sol, respectivamente; temos $AB = l$, $CD = s$, $OA = L$ e $OC = S$. Os triângulos OAB e OCD são retângulos em B e D, respectivamente, e possuem o ângulo $\hat{O}$ em comum. Logo esses triângulos são semelhantes e segue a relação $\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD}$, ou seja, $\frac{S}{L} = \frac{s}{l}$.



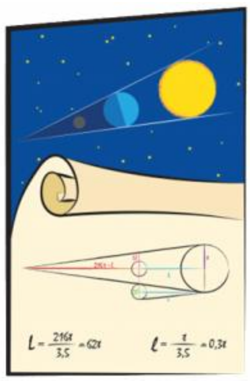
Passamos agora para a ilustração ao lado, que mostra uma observação simples: ao segurar uma moeda de modo a ocultar exatamente o Sol, a distância da moeda ao olho do observador é 216 vezes o raio dessa moeda.

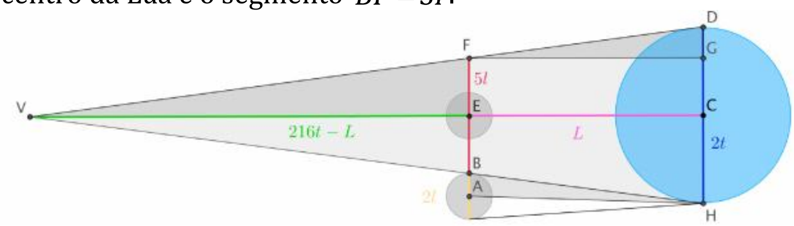


Podemos então pensar em um observador localizado no espaço com uma moeda, de raio igual ao raio da Terra, ocultando exatamente o Sol, como na ilustração. Nesse caso, o olho do observador estaria colocado no ponto *V*, que é o vértice do cone de sombra do Sol sobre a Terra; conclui-se que a distância da Terra ao vértice do cone de sombra do Sol é $216t$.

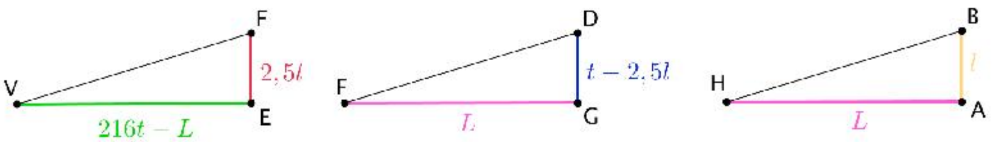
Observamos que o diagrama contém uma simplificação, que é a de supor *EF* perpendicular a *VE*; o correto seria desenhar *EF* perpendicular à tangente comum aos discos que representam a Terra e o Sol. Simplificação semelhante ocorre no diagrama geométrico relacionado à ilustração que segue; em ambos os casos, o erro introduzido é irrelevante comparado às grandezas envolvidas.

Essa ilustração representa outro fato astronômico, que vem da observação de um eclipse total da Lua. No momento em que o vértice do cone de sombra está alinhado com os centros da Lua, do Sol e da Terra, a seção do cone de sombra que passa pelo centro da Lua tem diâmetro igual a $5l$. Essa observação dá origem ao diagrama abaixo; nele, os discos cinzentos representam a Lua, o disco azul, a Terra e a seção do cone de sombra pelo centro da Lua é o segmento $BF = 5l$.



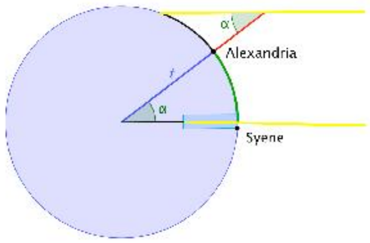


Os triângulos *VEF* e *FGD* são semelhantes, pois têm lados paralelos dois a dois. Já os triângulos *VEF* e *HAB* não são semelhantes, pois seus ângulos em *V* e *H* não são iguais. Pode-se, no entanto, mostrar que, devido à magnitude das grandezas envolvidas, que a diferença entre esses ângulos é mínima e que supô-los iguais não introduz um erro significativo nos cálculos que seguem. Desse modo, vamos supor que esses três triângulos são semelhantes.



Da semelhança dos triângulos FGD e HAB temos $\frac{t-2{,}5l}{L}=\frac{l}{L}$; simplificando, obtemos $t=3{,}5l$, ou seja, $l=\frac{t}{3{,}5}$. E da (suposta) semelhança dos triângulos VED e HAB temos $\frac{216t-L}{L}=\frac{2{,}5l}{l}=2{,}5$, que nos dá $3{,}5L=216t$, ou seja, $L=\frac{216t}{3{,}5}$. As aproximações $\frac{1}{3{,}5}\simeq 0{,}3$ e $\frac{216}{3{,}5}\simeq 62$ nos dão então as expressões $l\simeq 0{,}3t$ e $L\simeq 62t$.

Nossa próxima ilustração mostra Eratóstenes (276 a.C. – 195 a.C.), na cidade de Alexandria, colocando um bastão em posição vertical no momento em que ao sul, na cidade de Syene (atualmente chamada Aswan), um raio de sol atinge o fundo de um poço de água. Representamos essa situação esquematicamente na figura abaixo, onde o segmento vermelho corresponde ao bastão, o arco preto à sua sombra, o arco verde à distância entre Syene e Alexandria e os segmentos amarelos indicam os raios de Sol, supostos paralelos. Observamos que essa suposição de paralelismo não é correta, mas dada a magnitude da distância da Terra ao Sol, o erro introduzido não é importante para o que segue.

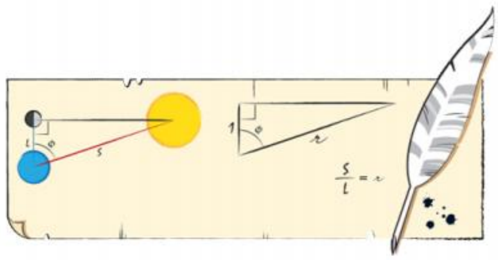


Os ângulos indicados em verdes são alternos internos com relação aos dois raios de sol, ou seja, têm a mesma medida a. Erastóstenes mediu $\alpha=7^{\circ}12'=\frac{360^{\circ}}{50}$ e concluiu que a distância de Alexandria a Syene é $\frac{1}{50}$ da circunferência da Terra. Na época, já se sabia que essa distância é 5000 estádios; Erastóstenes concluiu então que a circunferência da Terra é de $50\times 50000=250000$ estádios. Como a medida de uma circunferência de raio t é $2\pi t$, a expressão $2\pi t=250000$ leva a $t=\frac{250000}{2\pi}$ estádios. Desse modo, Eratóstesnes calculou o raio da Terra.

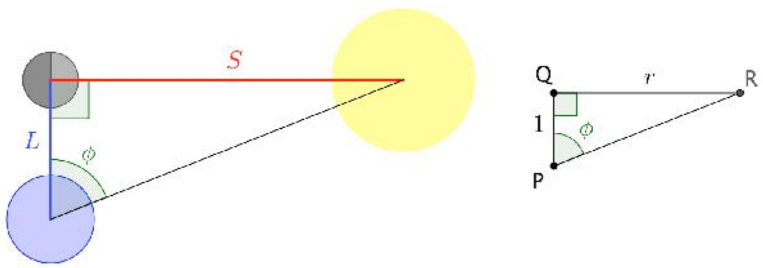
Há duas perguntas naturais aqui: como se conhecia a distância entre Alexandria e Syene e quanto mede um estádio? Quanto à primeira pergunta, supõe-se que essa distância era conhecida através do tempo gasto por caravanas de camelos entre as duas cidades (e, é claro, a velocidade média de um camelo!), ou então com o uso de um passista, que era uma pessoa encarregada de medir distâncias através da contagem de passos. Quanto à segunda pergunta, supõe-se que Erastóstenes usou o estádio egípcio, que media aproximadamente 157,5 metros.

Desse modo, Erastótenes obteve os valores $250000\times 157{,}5=39375000$ metros, ou 39375 quilômetros, como a medida da circunferência da Terra e $t=\frac{39375}{2\pi}\simeq 6267$ quilômetros. As medidas modernas são 40075 quilômetros e 6371 quilômetros, respectivamente, para a circunferência e o raio da Terra; assim, o erro cometido com o modelo grego e todas as simplificações que fizemos acima não chega a 2%!

Podemos agora calcular o raio da Lua como $l=\frac{t}{3{,}5}\simeq\frac{6267}{3{,}5}\simeq 1790$ quilômetros e a distância da Terra à Lua como $L=\frac{216t}{3{,}5}\simeq\frac{216\times 6267}{3{,}5}\simeq 386763$ quilômetros. Os valores modernos são 1737 quilômetros e 384400 quilômetros para o raio da Lua e a distância da Terra à Lua, respectivamente.



Falta discutir a determinação de s e *S*. A observação astronômica relevante é feita quando a Lua está na fase de meia-lua e tanto a Lua quanto o Sol aparecem no céu, como na ilustração ao lado. Ela dá origem aos dois triângulos semelhantes da figura abaixo. O triângulo da esquerda é o triângulo formado pelos centros da Terra, do Sol e da Lua no momento da observação; o ângulo ϕ é medido no momento da observação. O triângulo *PQR* é então desenhado com os mesmos ângulos do anterior, fazendo $PQ=1$.



Da semelhança desses triângulos temos $\frac{S}{L}=\frac{r}{1}=r$. Como $\frac{S}{L}=\frac{s}{l}$ temos também $\frac{s}{l}=r$, e segue que $S=rL$ e $s=rl$; como já conhecemos *L* e *l*, basta determinar *r* para conhecer *S* e *s*. Para medir *r* basta ter o triângulo *PQR*; desse modo, a medida de *r* depende apenas da determinação de ϕ. Este ângulo difere de 90° por menos de 10 minutos de grau; medi-lo com essa precisão era impossível na época. Aristarco (320 a.C. – 210 a.C.) fez a estimativa $\phi=87^\circ$, obtendo assim o valor $r\simeq 19$, muito aquém da estimativa atual $r\simeq 389$. Esse erro resultou em um cálculo de *S* e *L* aproximadamente 20 vezes menores que os reais; estimativas posteriores levaram os gregos a calcular um valor para *s* e *S* com erro em torno de 50%.

Usando a estimativa atual de *r*, obtemos $s=389\times 1790=696310$ quilômetros e $S=389\times 386763=150450807$ quilômetros; as medidas modernas são 695500 quilômetros e 150000000 quilômetros, respectivamente. Nada mau para geometria elementar!

Para ler mais sobre esse tema, recomendamos os seguintes artigos do Professor Geraldo Ávila na Revista do Professor de Matemática:

- *A geometria e as distâncias astronômicas na Grécia Antiga* – RPM 01
- *Geometria e Astronomia* – RPM 13
- *Aristarco e as dimensões astronômicas* – RPM 55