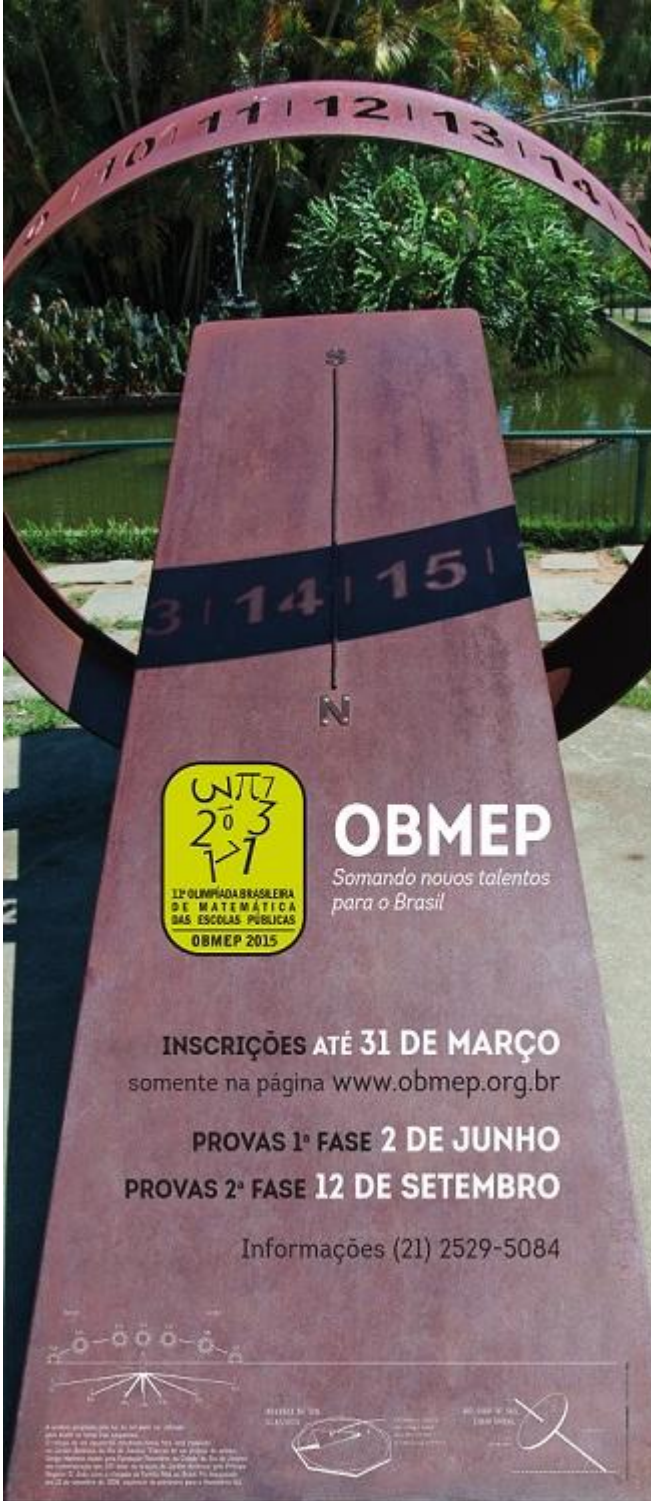


## Atividades e curiosidades relacionadas com o Cartaz da OBMEP 2015



**OBMEP**  
*Somando novos talentos para o Brasil*

**INSCRIÇÕES ATÉ 31 DE MARÇO**  
somente na página [www.obmep.org.br](http://www.obmep.org.br)

**PROVAS 1ª FASE 2 DE JUNHO**  
**PROVAS 2ª FASE 12 DE SETEMBRO**

Informações (21) 2529-5084

**12ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS OBMEP 2015**

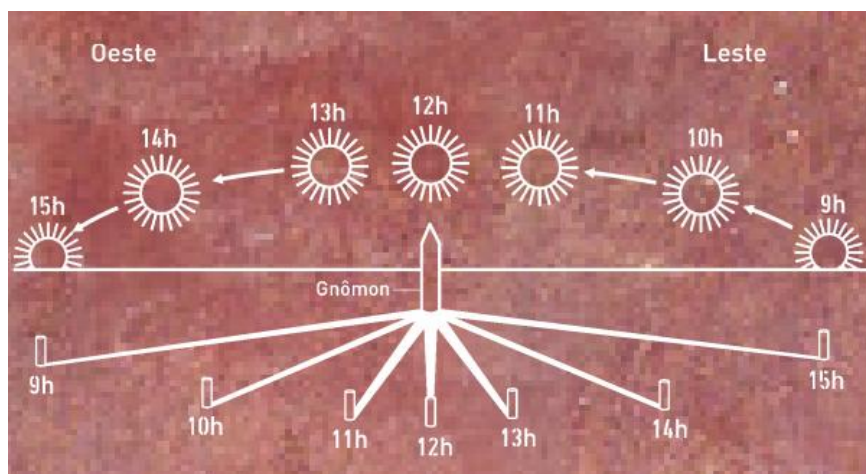
**SP200**  
CNPq SBM

**PARTECIPAÇÃO**  
PROTECTORADO DE MATEMÁTICA, FÍSICA E QUÍMICA

**GOVERNO FEDERAL**  
**BRASIL**

O cartaz da OBMEP 2015 apresenta um relógio de sol equatorial que se encontra no Jardim Botânico do Rio de Janeiro. A escolha deste tema pela OBMEP deve-se à comemoração do evento promovido pela UNESCO “**2015: o Ano Internacional da Luz e das Tecnologias Baseadas em Luz**”, além da beleza estética da obra.

A primeira ilustração na parte de baixo do cartaz mostra como a sombra de uma haste (gnômon) pode ser utilizada para medir o tempo. Para isto, não há necessidade de nenhum outro equipamento, mas alguns fatos básicos devem ser conhecidos: os pontos cardeais Leste e Oeste (ou a linha meridiana Norte e Sul) e a inclinação do gnômon com relação ao solo.



A segunda e a terceira ilustrações mostram dois modelos diferentes de relógios de sol.



As construções desses relógios são atividades que levam a estudos matemáticos importantes, com conexões relacionadas a muitas outras áreas do conhecimento. Então, mãos à obra!

### **Orientar é procurar o Oriente (Leste)**

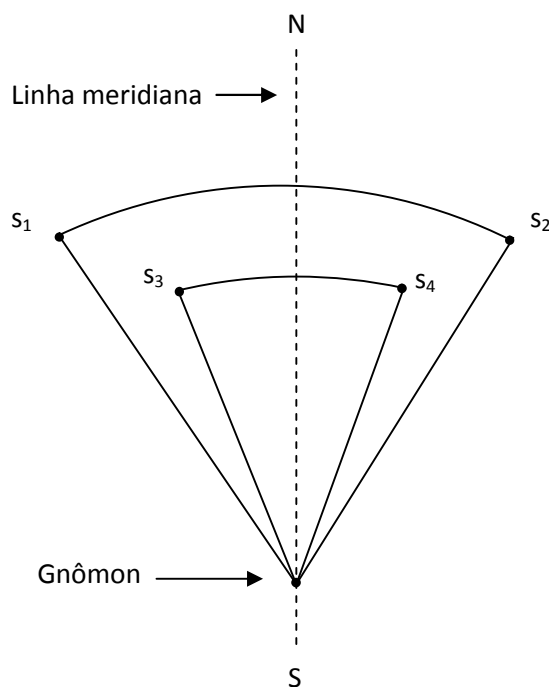
Desde pequenos percebemos o movimento aparente das coisas observando, por exemplo, os mourões de uma cerca nas margens de uma estrada que vão ficando para trás quando viajamos sentados no banco de um veículo. Temos a ilusão de que os mourões estão se movimentando, enquanto nós permanecemos parados. Esta ilusão do movimento aparente é utilizada na maioria dos jogos de *videogame*. Da mesma forma como nossos antepassados, observamos o movimento circular aparente de toda a esfera celeste de Leste para Oeste todos os dias. Em particular, o Sol nasce de um lado no horizonte e, elevando-se, ilumina a Terra à

medida que vai alcançando um ponto mais alto no céu e depois se põe do outro lado completando, aproximadamente, um arco de circunferência até desaparecer completamente. Para nossa atividade de construção de relógios solares vamos pensar que nos mantemos fixos em um ponto da Terra e que o Sol descreve um arco de circunferência sobre nossas cabeças.

Hoje sabemos que a Terra tem um movimento diário de rotação ao redor de seu próprio eixo, de Oeste para Leste e, de translação anual ao redor do Sol durante aproximadamente 365 dias e 6 horas, com uma velocidade cerca de 30.000 m/s.

Entretanto há um problema: o Sol não nasce no mesmo local do horizonte todos os dias. Então, onde fica o Leste (o Oriente) verdadeiro? Para responder a esta pergunta, vamos encontrar a linha meridiana local Norte-Sul (e, portanto, a Leste-Oeste) de um observador.

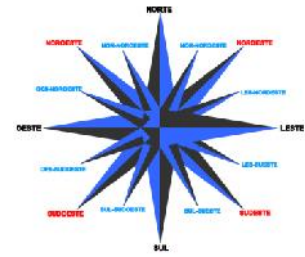
A linha meridiana local pode ser obtida marcando a direção da bissetriz das sombras da manhã e da tarde de mesmo tamanho de um gnômon. O procedimento consiste em fincar um gnômon em um local onde se tenha sol de manhã e de tarde, próximo do meio dia solar verdadeiro. Usa-se um fio de prumo para certificar-se de que a haste está realmente na posição vertical e, conseqüentemente, apontando para o centro da Terra. Traça-se no chão vários arcos de circunferências de sombra concêntricos das extremidades da sombra do gnômon, usando, por exemplo, um pedaço de barbante amarrado no pé do gnômon e marcando-se neles os raios de sombra da manhã ( $s_1$  e  $s_3$ ), ligando os pontos extremos das sombras com o pé do gnômon, conforme a vista superior indicada na figura a seguir.



No período da tarde marcam-se também os raios de sombra ( $s_4$  e  $s_2$ ) projetados pela haste que atinge a extremidade de cada um dos arcos de circunferências feitos no período da manhã, de modo a obter dois ângulos com vértices no pé da haste, cujos lados são os pares de raios de um arco de uma mesma circunferência de sombra. Traça-se a bissetriz de cada par destes raios de sombras congruentes. Como era de se esperar, elas coincidem (bastava,

portanto, a bissetriz de um dos pares  $s_1$  e  $s_2$  ou  $s_3$  e  $s_4$ ). A bissetriz comum destes ângulos de sombra de mesmo tamanho é a linha meridiana do local, indicando a direção Norte-Sul (N - S).

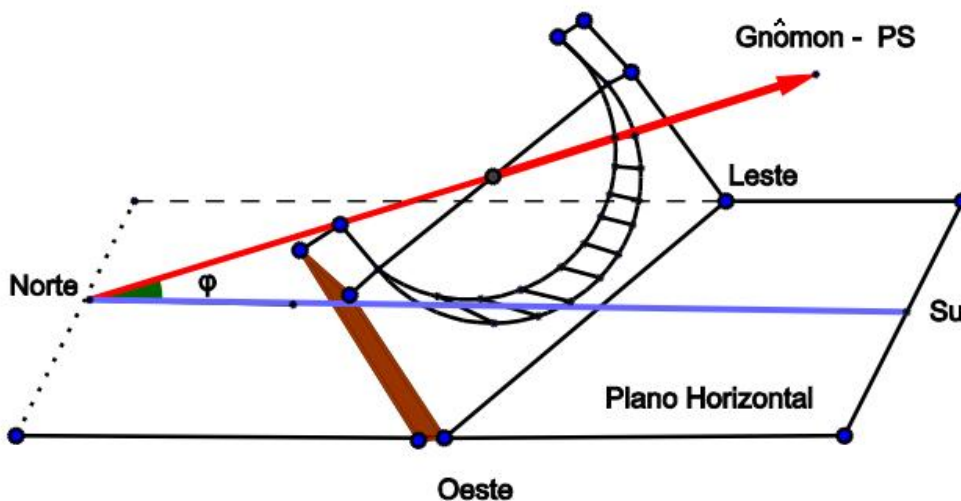
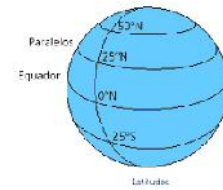
É importante, nesta etapa do experimento, atentar para que a noção de perpendicularidade seja corretamente utilizada, primeiramente ao fincar o gnômon no solo e, posteriormente, ao se traçar a perpendicular à meridiana N-S passando pelo ponto onde o gnômon foi fixado, a fim de se obter a linha Leste-Oeste (L-O ou L-W), e, como consequência, os pontos cardeais principais. A partir disto é fácil construir a Rosa dos Ventos.



### Construção de um relógio de sol equatorial:



Conhecendo-se a linha meridiana, precisamos conhecer a latitude do local (o afastamento, medido em graus, de um ponto com relação à linha do equador), a fim de construir um relógio de sol com mostrador equatorial. A ideia é apontar um gnômon para o polo celeste elevado do local, como se fosse o eixo no qual o mundo aparentemente gira 360° em 24 horas. Supondo o movimento de rotação da Terra uniforme durante o dia, graduamos a extremidade de um disco semicircular das 6 às 18 horas, de hora em hora, com intervalos igualmente espaçados de 15°, pois cada rotação da Terra de 15° corresponde a uma hora.

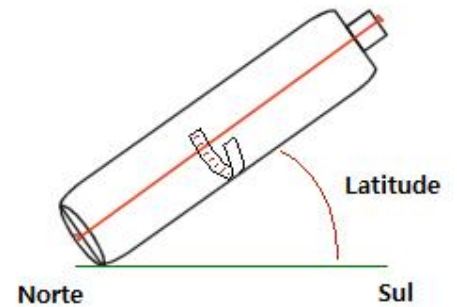


O disco circular centrado no eixo, como se a concavidade da semiesfera celeste fosse invertida num plano perpendicular ao gnômon (apontado para o polo elevado), pode ser fixado em uma placa horizontal inclinada de um ângulo de  $90\phi$ , em que  $\phi$  é a latitude local

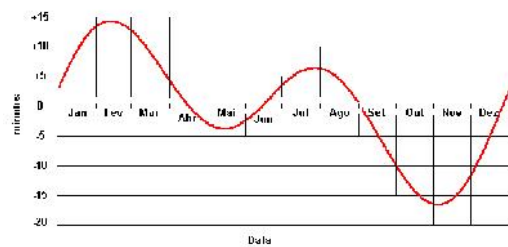
(altura do polo elevado), conforme a figura anterior. O eixo da esfera celeste funciona como um grande ponteiro fixo para determinação das horas.



Uma ideia simples é utilizar uma garrafa PET com formato cilíndrico para confeccionar o relógio de sol. Observe que a garrafa com um barbante dentro deve estar corretamente posicionada de acordo com a linha Norte-Sul e com a elevação (latitude)  $\phi$ . Para isto é necessário o auxílio de um transferidor.



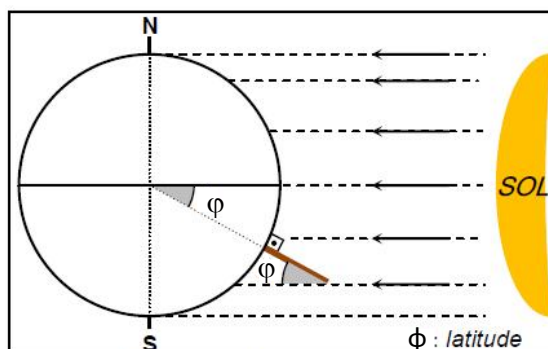
Nas construções descritas anteriormente não foram levados em conta os efeitos representados matematicamente pela equação do tempo, que estabelece a diferença entre o tempo solar verdadeiro e o tempo solar médio. O movimento aparente do Sol ocorre ao longo da eclíptica, e não no equador celeste e com uma velocidade variável, pois a órbita da Terra é elíptica (mas, nem tanto excêntrica como geralmente aparece nas ilustrações) e não circular. Para ser mais preciso na medição do tempo é necessário um analema, um gráfico ou uma tabela indicando a diferença da hora do relógio solar observada nas várias épocas do ano com a hora legal (gráfico ao lado).



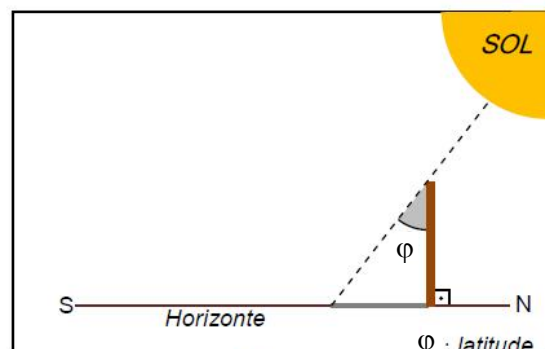
### Determinação da latitude:

A latitude local é a altura do polo elevado. O cálculo da latitude mais fácil pode ser feito em apenas dois dias do ano, nos equinócios de outono ou primavera. Basta medir a altura do Sol no meridiano local ao meio-dia solar verdadeiro e tomar o seu complemento. Em outros dias temos de fazer uma correção. O meio-dia solar verdadeiro nem sempre é o meio-dia solar médio (o mesmo que marca os relógios), por isto temos que tomar alguns cuidados. Nos equinócios de outono ou de primavera, o meio-dia verdadeiro é a hora em que a sombra do gnômon coincide, precisamente, com a linha Norte-Sul ou desaparece (desaparecerá somente nos pontos situados no equador terrestre).

Para determinar a latitude, primeiramente devemos traçar a linha Norte-Sul como descrito anteriormente. É sabido que nos equinócios de primavera e outono os raios solares incidem paralelamente ao equador terrestre; assim, o ângulo formado entre os raios solares e uma estaca fincada perpendicularmente ao solo, ao meio-dia solar verdadeiro, é o valor exato da latitude local, como mostram as figuras abaixo:



Sombra projetada por um gnômon no Equinócio de Outono



Sombra projetada por um gnômon no Equinócio de Outono (vista horizontal)

Conhecidos os tamanhos da sombra e da estaca, a tangente do ângulo pode ser usada para se calcular facilmente o valor  $\phi$  da latitude. Entretanto, como salientamos anteriormente, a aplicação direta deste método só pode ser feita em dois dias do ano. Caso não seja possível fazer medições nesses dias, correções devem ser feitas (veja em <http://www.cienciaviva.pt/equinocio/download/guiiao.pdf> como fazer isto). Além disto, informações sobre a latitude podem ser conseguidas em muitos locais: consultando-se mapas, globos terrestres, Internet ou GPS. Por exemplo, os dados sobre as capitais dos estados brasileiros estão expostos na tabela a seguir (observe a cidade de Macapá, muito próxima do equador terrestre):

Capital	UF	Latitude	Longitude
Aracajú	SE	10° 54' 40" S	37° 04' 18" W
Belém	PA	01° 27' 21" S	48° 30' 16" W
Belo Horizonte	MG	19° 55' 15" S	43° 56' 16" W
Boa Vista	RR	02° 49' 11" N	60° 40' 24" W
Brasília	DF	15° 46' 47" S	47° 55' 47" W
Campo Grande	MS	20° 26' 34" S	54° 30' 47" W
Curabá	MI	15° 35' 16" S	56° 05' 18" W
Curitiba	PR	25° 25' 40" S	49° 16' 23" W
Florianópolis	SC	27° 35' 48" S	48° 32' 57" W
Fortaleza	CE	03° 43' 02" S	38° 32' 35" W
Goiânia	GO	16° 40' 43" S	49° 15' 14" W
João Pessoa	PB	07° 06' 54" S	34° 51' 47" W
Macapá	AP	00° 02' 20" N	51° 03' 59" W
Maceió	AL	09° 39' 57" S	35° 44' 07" W
Manaus	AM	03° 06' 07" S	60° 01' 30" W
Natal	RN	05° 47' 42" S	35° 12' 34" W
Palmas	TO	10° 12' 46" S	48° 21' 37" W
Porto Alegre	RS	30° 01' 59" S	51° 13' 48" W
Porto Velho	RO	08° 45' 43" S	63° 54' 14" W
Recife	PE	08° 03' 14" S	34° 52' 52" W
Rio Branco	AC	09° 58' 29" S	67° 48' 36" W
Rio de Janeiro	RJ	22° 54' 10" S	43° 12' 27" W
Salvador	BA	12° 58' 16" S	38° 30' 39" W
São Luís	MA	02° 31' 47" S	44° 18' 10" W
São Paulo	SP	23° 32' 51" S	46° 38' 10" W
Teresina	PI	05° 05' 21" S	42° 48' 07" W
Vitória	ES	20° 19' 10" S	40° 20' 16" W

Assim, com algum conhecimento matemático, você nunca estará perdido; sempre saberá onde está e, pelo menos nos dias ensolarados, que horas são.

Para saber mais:

[http://www.btdt.ufscar.br/htdocs/tedeSimplificado/tde\\_busca/arquivo.php?codArquivo=5280](http://www.btdt.ufscar.br/htdocs/tedeSimplificado/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=5280)

<http://www.cienciaviva.pt/equinocio/download/guiiao.pdf>

SALVADOR, J. A. *Astromatemática* – XXXII CNMAC, 2009.