QUESTÃO 1

a	16	5
1	b	c
d	e	f

Começamos por designar os valores a serem colocados nos diversos quadradinhos pelas letras a, b, c, d, e, f.

a. [6 pontos] Igualando os produtos dos números na primeira linha e na primeira coluna, obtemos $a \cdot 16 \cdot 5 = a \cdot 1 \cdot d$. Como $a \neq 0$, isto implica em que o número que deve ser escrito no quadradinho amarelo é $d = 80$.

b. [6 pontos] Igualando os produtos dos números na segunda coluna e na diagonal secundária, obtemos $16 \cdot b \cdot e = 5 \cdot b \cdot 80$. Como $b \neq 0$, isto implica em que o número que deve ser escrito no quadradinho azul é $e = \frac{5 \cdot 80}{16} = 25$.

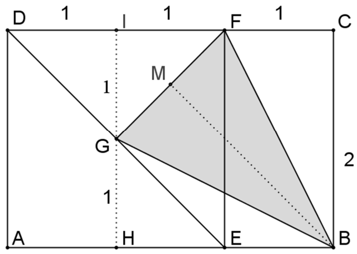
100	16	5
1	20	400
80	25	4

c. [8 pontos] Igualando os produtos dos números na segunda linha e na segunda coluna, obtemos $1 \cdot b \cdot c = 16 \cdot b \cdot 25$, o que fornece $c = 400$. Resta, agora, obter os números *a, b* e *f* da diagonal principal. Igualando os produtos nas três linhas e na diagonal principal, temos $80a = 400b = 2000f = abf$. Daí, obtemos $a = 25f$ e $b = 5f$, donde $2000f = 125f^3$, ou seja, $125(16 - f^2) = 0$. Como $f > 0$, resulta que $f = 4$. Daí, $a = 100$ e $b = 20$. O quadrado preenchido é mostrado ao lado. É fácil verificar que, de fato, o produto dos números nas linhas, colunas e diagonais é sempre 8000.

QUESTÃO 2

Para simplificar a notação, vamos denotar a área de um polígono com parêntesis; por exemplo, a área do triângulo BFG será denotada por (BFG).

a. **[6 pontos]**



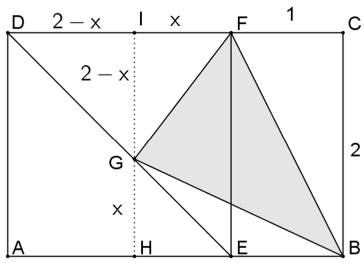
1ª solução: Na figura ao lado, os pontos H e I são os pés das perpendiculares traçadas por G aos lados AB e CD. O teorema de Pitágoras aplicado aos triângulos BCG, BHG e FIG nos mostra que $BF = BG = \sqrt{5}$ e $FG = \sqrt{2}$. Denotando por M o ponto médio de FG, segue que BM é a altura do triângulo BFG relativa ao lado FG. Outra aplicação do teorema de Pitágoras nos mostra que $BM = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Logo

$$(BFG) = \frac{1}{2} FG \cdot BM = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}.$$

2ª solução: Temos $(BFG) = (BCDE) - (BFC) - (FGD) - (GEB)$. Por outro lado, temos $(BCDE) = \frac{3+1}{2} \cdot 2 = 4$ (alternativamente, $(BCDE) = (ABCD) - (ADE) = 3 \cdot 2 - \frac{2 \cdot 2}{2} = 4$), $(BFC) = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$, $(FGD) = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$ e $(GEB) = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$; segue que $(BFG) = 4 - 1 - 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

3ª solução: Resolver primeiro o item (b) e calcular $f(1)$.

b. **[8 pontos]**



1ª solução: Observamos na figura ao lado que o triângulo DIG é isósceles; logo $DI = DG = 2 - x$ e então $FI = 2 - DI = 2 - (2 - x) = x$. Observamos também que $BFIG$ é um trapézio; segue que

$$\begin{aligned} f(x) &= (BFG) = (BCIG) - (FIG) - (BCF) \\ &= (1+x)\frac{2+(2-x)}{2} - \frac{x(2-x)}{2} - 1 = 1 + \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

Observamos que quando G é o ponto médio de DE temos $x = 1$ e $(BFG) = f(1) = \frac{3}{2}$, como no item anterior.

2ª solução: Como na segunda solução do item anterior, temos $(BFG) = (BCDE) - (BFC) - (FGD) - (GEB)$. Por outro lado, temos $(BCDE) = \frac{3+1}{2} \cdot 2 = 4$

(alternativamente, $(BCDE) = (ABCD) - (ADE) = 3\cdot 2 - \frac{2\cdot 2}{2} = 4$), $(BFC) = \frac{2\cdot 1}{2} = 1$,
$(FGD) = \frac{2\cdot(2-x)}{2} = 2-x$ e $(GEB) = \frac{1\cdot x}{2} = \frac{x}{2}$; segue que $(BFG) = 4-1-(2-x)-\frac{x}{2} = 1+\frac{x}{2}$.

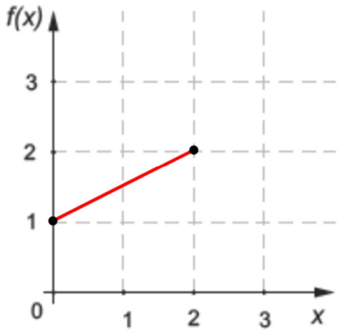
3ª solução: Estabelecendo um sistema de coordenadas de origem *A* e eixos *AB* e *AD*, as coordenadas dos vértices do triângulo *BFG* são $B(3,0)$, $F(2,2)$ e $G(2-x,x)$. Segue que

$$(BFG) = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2-x & x & 1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}|x+2| = 1+\frac{x}{2}$$

4ª solução: A distância de *G* à reta *BF* varia linearmente com *x* (podemos observar, por exemplo, que *EG* varia linearmente com *x* e que a distância de *G* a *BF* varia linearmente com *EG*). Como a base *BF* é fixa, a área de *(BFG)* também varia linearmente com *x*. Portanto, *f* é da forma $f(x) = ax+b$. Como $f(0)=1$ e $f(2)=2$ temos $a=\frac{1}{2}$ e $b=1$. Logo $f(x)=1+\frac{x}{2}$.

c. **[2 pontos]** Observamos que *x* varia de 0(quando *G* coincide com *E*) a 2 (quando *G* coincide com *D*). Logo o domínio de *f* é o intervalo [0,2].

d. **[4 pontos]** O gráfico de *f* aparece na figura ao lado.



QUESTÃO 3

a. **[6 pontos]** Os quadrados cinzentos em um tapete $m \times n$ formam um tapete $(m-2)\times(n-2)$, que tem $(m-2)(n-2) = mn-2m-2n+4$ quadrados. O número de quadrados brancos nesse tapete é então $mn-(mn-2m-2n+4) = 2m+2n-4$.

b. **[6 pontos]** Se o número de quadrados brancos é igual ao de quadrados cinzentos então o número total de quadrados é igual a duas vezes o número de quadrados cinzentos, ou seja, $mn = 2(m-2)(n-2)$. Pode-se também usar a expressão $mn = 2(2m+2n-4) = 2[\mathrm{mn}-(\mathrm{m}-2)(\mathrm{n}-2)]$ para obter o resultado.

c. **[8 pontos]**
1ª solução: De $mn = 2(\mathrm{m}-2)(\mathrm{n}-2) = 2\mathrm{mn}-4\mathrm{m}-4\mathrm{n}+8$ obtemos

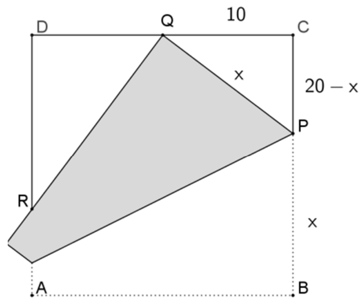
$$m = \frac{4n-8}{n-4} = \frac{4(n-4)+8}{n-4} = 4+\frac{8}{n-4}.$$

Dessa expressão concluímos que *m* é inteiro se e somente se $\frac{8}{n-4}$ é inteiro, ou seja, se e somente se *n* assume os valores 5, 6, 8 e 12; os valores correspondentes de *m* são 12, 8, 6 e 5. Logo os tapetes em que o número de quadrados cinzentos e brancos é o mesmo têm as dimensões 12×5, 8×6, 6×8 e 5×12.

2ª solução: A condição do item (b) pode ser escrita na forma $mn-4m-4n=-8$, que é equivalente a $mn-4m-4n+16 = 16-8 = 8$, ou ainda, $(m-4)(n-4)=8$. Portanto, para encontrar as possíveis soluções, basta obter as possíveis decomposições de 8 como produtos de dois inteiros. As possibilidades são:

- $m-4=8, n-4=1$ 1, ou seja, $m=12, n=5$.
- $m-4=4, n-4=2$, ou seja, $m=8, n=6$
- $m-4=2, n-4=2$, ou seja, $m=6, n=8$
- $m-4=1, n-4=8$, ou seja, $m=5, n=12$

QUESTÃO 4



a. [6 pontos] Seja $BP = x$. Temos então $QP = x$ e $CP = 20 - x$; e como Q é ponto médio de CDE temos também $CQ = 10$. O teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo PCQ nos dá $x^2 = 10^2 + (20 - x)^2$ e segue imediatamente que $x = 12{,}5$.

b. [6 pontos]

1ª solução: De $P\hat{Q}R = 90^\circ$ segue que $90^\circ = P\hat{Q}C + D\hat{Q}R = P\hat{Q}C + Q\hat{P}C$ e então $Q\hat{P}C = D\hat{Q}R$

2ª solução: O ângulo $D\hat{Q}P$ é externo ao triângulo QPC e segue que

$D\hat{Q}R + 90^\circ = R\hat{Q}P + D\hat{Q}R = D\hat{Q}P = Q\hat{P}C + Q\hat{C}P = Q\hat{P}C + 90^\circ$; logo $D\hat{Q}R = Q\hat{P}C$.

3ª solução: Observamos que as retas suportes dos segmentos QP e QR, bem como de CP e DQ, são perpendiculares; como ambos esses ângulos são agudos, segue que eles são iguais.

c. [8 pontos]

1ª solução: O item anterior mostra que os triângulos CPQ e DQR são semelhantes, pois são retângulos e têm um ângulo comum. Temos então $\frac{DR}{CQ} = \frac{DQ}{CP} = \frac{10}{7{,}5} = \frac{4}{3}$; como $CQ = 10$ segue que $DR = \frac{40}{3}$.

2ª solução: Como $D\hat{Q}R = Q\hat{P}C$, suas tangentes são iguais, ou seja, $\frac{DR}{DQ} = \frac{CQ}{CP}$; logo $\frac{DR}{10} = \frac{10}{7{,}5}$, o que nos dá $DR = \frac{40}{3}$.

QUESTÃO 5

a. [6 pontos]

PBBBBBBPPBP $\xrightarrow{Ana}$ BPPPPPBBPB $\xrightarrow{Carlos}$ BBBBBPPBP $\xrightarrow{Ana}$ BBPB $\xrightarrow{Carlos}$ BP $\xrightarrow{Ana}$ B $\xrightarrow{Carlos}$ fim

b. [6 pontos]

Para que o jogo termine em 11 jogadas, nenhum cartão deve ser retirado na primeira jogada e um cartão deve ser retirado em cada jogada subsequente. Para que isto ocorra, o primeiro cartão deve ser P, seguido de B's e P's alternados. A posição inicial deve ser, portanto, PBPBPBPBPB.

c. [8 pontos]

1ª solução: Para que Carlos ganhe, o número de jogadas deve ser ímpar. Por outro lado, o número de jogadas depende apenas do número de blocos de cartões consecutivos com cores iguais (que chamaremos simplesmente de número de blocos, daqui por diante). Se o primeiro cartão é B, o número de jogadas é exatamente o número de blocos; se o primeiro cartão é P, há uma jogada inicial adicional, correspondente a virar todos os cartões. Portanto, Carlos ganha quando o primeiro cartão é **B** e há um número **ímpar** de blocos ou o primeiro cartão é **P** e há um número **par** de blocos.

Carlos pode assegurar sua vitória simplesmente escolhendo adequadamente seu último cartão. Para manter a paridade do número de blocos, basta colocar um cartão de mesma cor que o jogado anteriormente; para alterar a paridade, basta colocar um cartão com a cor oposta à cor do cartão anterior. Mais explicitamente:

- se o primeiro cartão é B e nos 9 primeiros cartões há um número ímpar de blocos, ele deve colocar um cartão de mesma cor que o anterior; senão, o cartão deve ser de cor oposta.
- se o primeiro cartão é P e nos 9 primeiros cartões há um número par de blocos, ele deve colocar um cartão de mesma cor que o anterior; senão, o cartão deve ser de cor oposta.

2ª solução: Basta que Carlos coloque sempre B. Para justificar, vamos supor as cartas de Carlos colocadas na mesa como XBXBXBXBXB, onde X indicam os espaços para Ana colocar suas cartas. Observamos que, até aqui, temos um único bloco. Se Ana colocar B no primeiro espaço à esquerda, continuamos a ter um único bloco; caso contrário, o número de blocos aumenta para 6. A partir daí, é imediato que a cada B que Ana colocar o número de blocos não muda e que a cada P o número de blocos aumenta em 2; ou seja, a paridade do número de blocos permanece constante a partir da primeira carta de Ana; é ímpar se a primeira carta é B e par se a primeira carta é P, e o argumento segue como exposto na solução anterior.

QUESTÃO 6

Observação: Embora o enunciado especifique que as bolas são retiradas uma a uma, as probabilidades dos diversos eventos não são alteradas se as bolas são retiradas simultaneamente.

a. [6 pontos]

1ª solução: O número de modos de retirar três bolas, uma a uma, é $10\times 9\times 8$. Para que as três bolas determinem um triângulo isósceles, uma delas deve corresponder ao vértice oposto à base. Portanto, o vértice do triângulo pode ser escolhido de 3×10 modos. Das bolas restantes, a primeira só não pode ser a correspondente ao vértice diametralmente oposto. Logo, há 8 possibilidades Uma vez escolhida esta bola, a outra está determinada. Logo, o número de retiradas que correspondem a triângulos isósceles é $3 \times 10 \times 8$. A probabilidade de que as três bolas determinem um triângulo isósceles é $\frac{3\times 10\times 8}{10\times 9\times 8}=\frac{1}{3}$.

2ª solução (retirando as bolas simultaneamente): Há $\binom{10}{3}$ modos de se retirar três bolas. Para que elas formem um triângulo isósceles, o vértice oposto à base pode ser qualquer dos 10 pontos; uma vez ele tendo sido escolhido, há 4 modos de escolher os vértices da base. Logo, há 10×4 casos favoráveis e a probabilidade de que seja determinado um triângulo isósceles é

$$\frac{10\times 4}{\binom{10}{3}}=\frac{40}{120}=\frac{1}{3}$$

b. [8 pontos]

1ª solução: O número de modos de retirar quatro bolas, uma a uma, é $10\times 9\times 8\times 7$. Para que as quatro bolas determinem um quadrilátero convexo com exatamente dois ângulos retos, duas devem corresponder a dois pontos diametralmente opostos e as demais devem estar uma de cada lado deste diâmetro, em posições não diametralmente opostas. Há 5 modos de escolher um diâmetro e, a seguir, 4×3 modos para escolher as bolas correspondentes. A primeira das bolas restantes pode ser qualquer uma das 8 que sobraram. Uma vez ela escolhida, a última pode ser qualquer uma das 3 bolas que ficam do outro lado do diâmetro, excluída a diametralmente oposta. Logo, o número de retiradas que correspondem a quadriláteros com exatamente dois ângulos retos é $5 \times 4 \times 3 \times 8 \times 3$. A probabilidade de que as quatro bolas determinem um tal quadrilátero é $\frac{5\times 4\times 3\times 8\times 3}{10\times 9\times 8\times 7}=\frac{2}{7}$.

2ª solução (retirando as bolas simultaneamente): Há $\binom{10}{4}$ modos de se retirar quatro bolas. Para que o quadrilátero tenha exatamente dois ângulos retos, duas bolas devem corresponder a pontos diametralmente opostos, o que pode ser feito de 5 modos diferentes. As outras bolas devem corresponder a pontos não diametralmente opostos situados de cada lado deste diâmetro; portanto, podem ser escolhidas de $4 \times 3 = 12$ modos. Logo, o número de casos favoráveis é $5 \times 12 = 60$ e a probabilidade de se formar um quadrilátero com exatamente dois ângulos retos é

$$\frac{60}{\binom{10}{4}}=\frac{60}{210}=\frac{2}{7}$$

c. [6 pontos]
O número de modos de retirar cinco bolas, uma a uma, é $10\times9\times8\times7\times6$. Vamos calcular, inicialmente, a probabilidade de que o centro da circunferência não seja interior ao pentágono. Para que isto ocorra, há duas situações possíveis:

i. *Os 5 pontos são consecutivos (neste caso, o centro da circunferência é exterior ao pentágono:* Há 10 modos de escolher 5 pontos consecutivos e eles podem ser ordenados de $5\times4\times3\times2\times1$ modos. Logo, há $10\times5\times4\times3\times2\times1 = 1200$ casos favoráveis nesta situação.

ii. *Dois pontos são extremos de um diâmetro e os demais estão do mesmo lado dele (neste caso, o centro da circunferência está sobre um dos lados):* Há 5 possibilidades para a escolha do diâmetro, 2 para escolher o lado em que o polígono se encontra e 4 para escolher o único ponto dentre os situados deste lado que não é escolhido. Além disso, os 5 pontos podem ser ordenados de $5\times4\times3\times2\times1$ modos. Logo, há $5\times2\times4\times 5\times4\times3\times2\times1 = 4800$ casos favoráveis neste caso.

Reunindo os casos i. e ii., obtemos um total de $1200+4800=6000$ casos favoráveis. Portanto, a probabilidade de que o centro não seja interior ao pentágono é

$$\frac{6000}{10\times9\times8\times7\times6}=\frac{25}{126}$$

Finalmente, a probabilidade de que o centro seja interior ao pentágono é $1-\frac{25}{126}=\frac{101}{126}$.

2ª solução (sem levar em conta a ordem das retiradas): Há $\binom{10}{5}$ modos de se retirar cinco bolas. Vamos calcular, inicialmente, a probabilidade de que o centro da circunferência não seja interior ao pentágono. Para que isto ocorra, há duas situações possíveis:

i. *Os 5 pontos são consecutivos (neste caso, o centro da circunferência é exterior ao pentágono)*. Há 10 modos de escolher 5 pontos consecutivos . Logo, há 10 casos favoráveis nesta situação.

ii. *Dois pontos são extremos de um diâmetro e os demais estão do mesmo lado dele (neste caso, o centro da circunferência está sobre um dos lados)*. Há 5 possibilidades para a escolha do diâmetro, 2 para escolher o lado em que o polígono se encontra e 4 para escolher o único ponto dentre os situados deste lado que não é escolhido. Logo, há $5\times4\times2=40$ modos para escolher os vértices do pentágono.

Reunindo os casos i. e ii., obtemos um total de $10+40=50$ casos favoráveis. Portanto, a probabilidade de que o centro não seja interior ao pentágono é

$$\frac{50}{\binom{10}{5}}=\frac{50}{252}=\frac{25}{126}$$

Finalmente, a probabilidade de que o centro não seja interior é $1-\frac{25}{126}=\frac{101}{126}$.