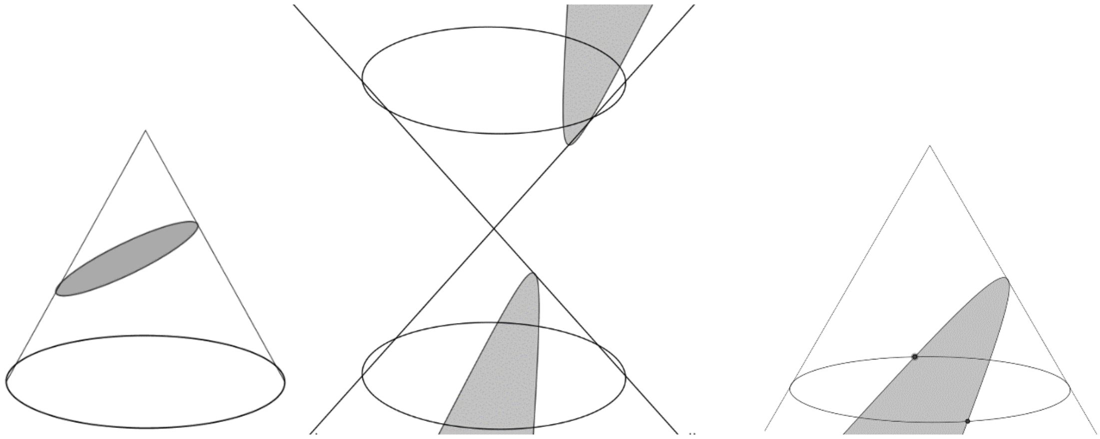
Curiosidades relacionadas com o Cartaz da OBMEP 2017

As esferas de Dandelin

A integração das duas maiores competições matemáticas do país, a OBMEP e a OBM, inspirou-nos a anunciar nos quatro cantos do país que este era um ano de grandes interseções, ainda mais quando se comemora o Biênio da Matemática no Brasil (www.bieniodamatematica.org.br).

Em nosso cartaz de lançamento da OBMEP 2017 provocamos a curiosidade sobre um assunto pouco usual nas salas de aula: as possíveis seções de corte entre um plano e uma superfície cônica.

É fascinante como pequenas modificações no ângulo que o plano de corte faz com o eixo do cone são capazes de modificar de forma extrema o formato da seção formada. Observe:

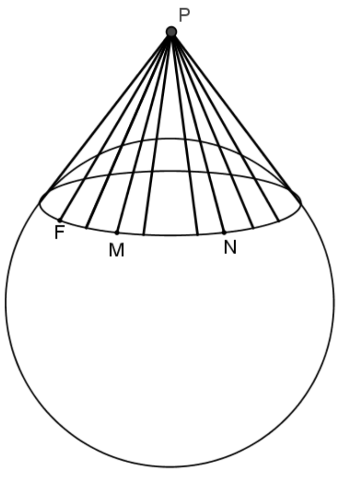


Na primeira figura o corte originou uma elipse, na segunda, uma hipérbole e na terceira, uma parábola.

Nossa intenção será estudar um pouco mais a fundo essas interseções entre planos e superfícies cônicas e, para tal, conheceremos os teoremas de Dandelin (Germinal Pierre Dandelin foi um matemático nascido na França no ano de 1794, tendo falecido na Bélgica em 1847).

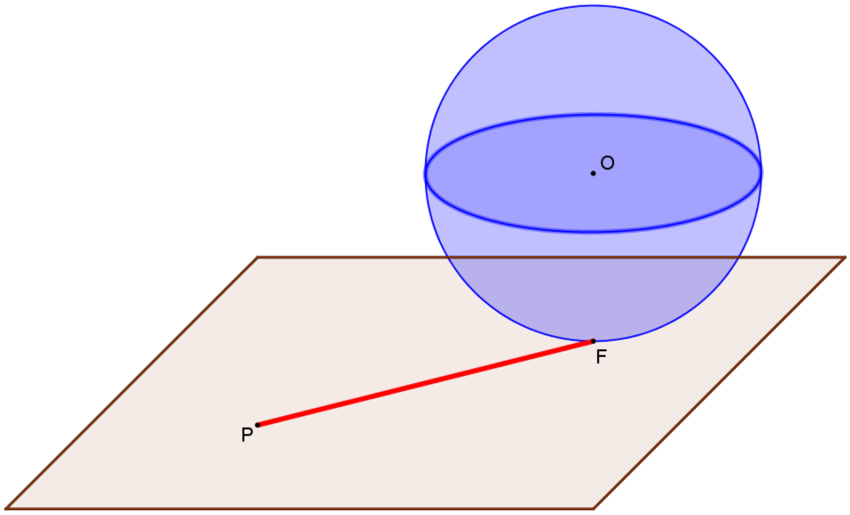
Antes, porém, vamos relembrar algumas propriedades bem básicas da geometria espacial:

- Se de um ponto exterior a uma esfera traçarmos todas as retas tangentes a esta esfera, então os comprimentos de todos os segmentos que vão do ponto dado até qualquer um dos pontos de tangência são iguais.

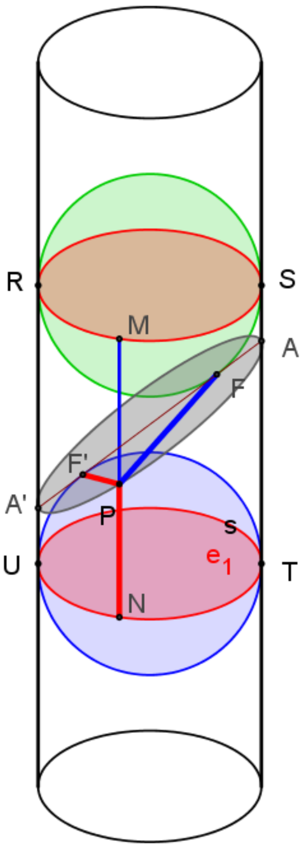


PF=PM=PN=...

- Se uma esfera tangencia um plano em um ponto F e P é um outro ponto qualquer do plano então o segmento PF é tangente à esfera.



Com estes dois pré-requisitos estamos prontos para compreendermos os resultados de Dandelin. Mas, vamos começar com uma situação mais simples para aquecermos as turbinas; vamos analisar primeiramente a seção formada pela interseção de uma superfície cilíndrica com um plano inclinado, como se vê na figura.



Uma vez cortada a superfície cilíndrica com um plano inclinado, vamos construir duas esferas, conhecidas como esferas de Dandelin, ambas tangentes ao plano inclinado, respectivamente nos pontos F e F' e tangentes à superfície cilíndrica.

Repare que o contato de cada esfera de Dandelin com a superfície cilíndrica é uma circunferência. As duas circunferências de contato são bases de um cilindro de geratriz constante RU, ao qual atribuiremos ao seu comprimento o valor de 2a. Assim,

$$RU = ST = MN = 2a$$

Seja P um ponto qualquer da superfície de corte entre o plano inclinado e a superfície cilíndrica. Então,

PF e PM são dois segmentos tangentes à esfera de Dandelin de cima. Logo PF = PM

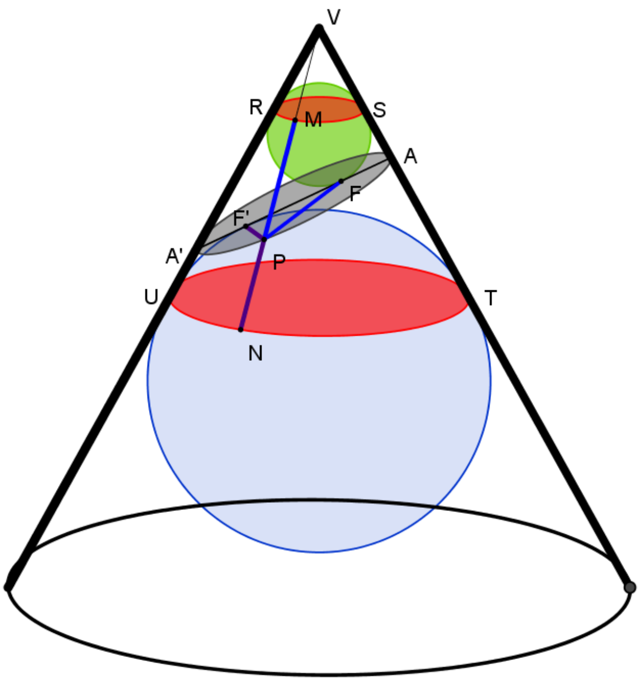
PF' e PN são dois segmentos tangentes à esfera de Dandelin de baixo. Logo PF' = PN

Portanto, PF + PF' = PM + PN = MN. Logo, PF + PF' = 2a = constante.

Ou seja, esta superfície de corte tem a interessante propriedade de ser tal que a soma das distâncias a dois pontos fixos é constante. Curvas planas com esta propriedade são conhecidas como **elipses.**

Agora estamos prontos para entender o que acontece quanto intersectamos um plano com uma superfície cônica, a ideia não será muito diferente da já empregada acima, só que agora separaremos em três situações:

1º Caso: Quando o ângulo que o plano faz com o eixo do cone é maior do que o ângulo que a geratriz do cone faz com o mesmo eixo.



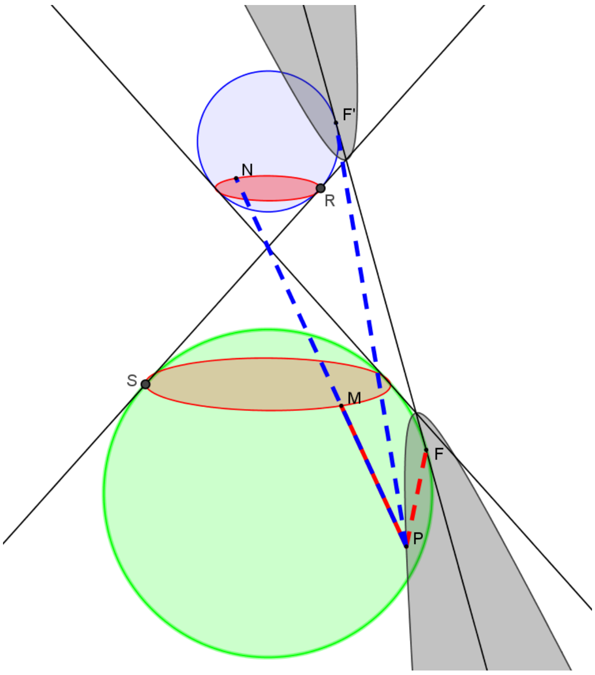
Novamente traçaremos duas esferas de Dandelin tangentes ao plano inclinado e à superfície cônica. Chamaremos de F e F’ as interseções das esferas com o plano e as circunferências de diâmetros RS e TU representam os contatos que as respectivas esferas fazem com a superfície cônica.

Essas duas circunferências são bases de um tronco de cone de geratriz de comprimento constante que chamaremos de 2a, ou seja, RU = ST = MN = 2a. Mais uma vez utilizaremos o fato que duas tangentes traçadas a uma mesma esfera a partir de um mesmo ponto determinam segmentos de mesmo tamanho. Assim,

PF = PM e PF’ = PN, Portanto, PF + PF’ = PM + PN = MN = 2a.

Portanto, o corte nesta primeira situação também é uma **elipse**, uma curva de mesmo formato da obtida no corte da superfície cilíndrica.

2º Caso: Quando o ângulo que o plano inclinado forma com o eixo do cone é menor do que o ângulo que a geratriz forma com o eixo.



A figura parece um pouco mais rebuscada neste segundo caso, mas a essência de como descobrimos a propriedade associada a esta nova curva é a mesma.

Após traçar as esferas de Dandelin temos:

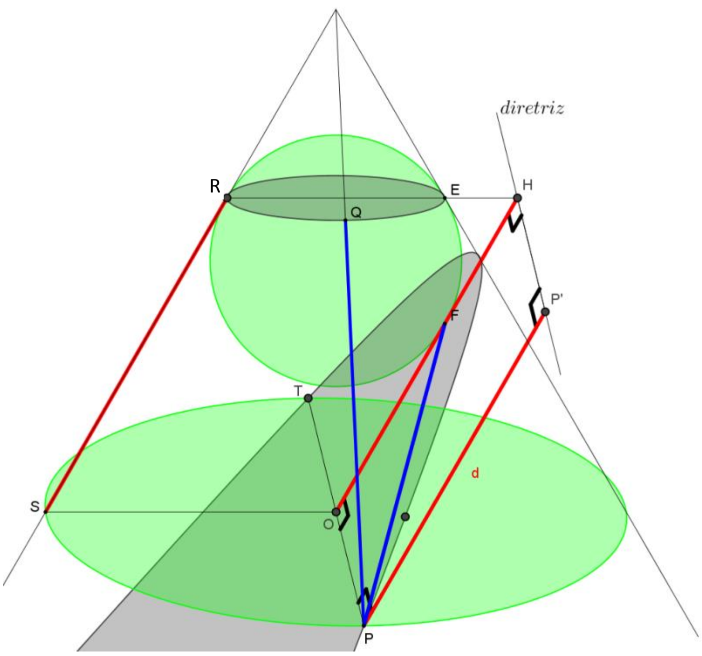
PF' = PN e PF = PM, logo

PF' – PF = PN – PM = MN = 2a.

Logo, o que caracteriza esta curva é que a diferença absoluta entre as distâncias a dois pontos fixos é constante.

Curvas com esta propriedade são denominadas **hipérboles**.

3º Caso: Quando o ângulo que o plano inclinado forma com o eixo do cone é igual ao ângulo que a geratriz forma com o eixo.



Neste caso, o plano inclinado fica paralelo a uma geratriz do cone e consideramos apenas uma esfera tangente ao cone. Esta figura é um pouco mais complexa. Vamos chamar de *diretriz* à reta resultante da interseção do plano de corte com o plano que contém a circunferência formada pelos pontos de interseção da esfera de Dandelin com o cone. Notemos primeiramente que a reta diretriz e o segmento TP são paralelos entre si (são ambos perpendiculares a uma seção meridiana do cone, isto é, são perpendiculares ao plano que contém o vértice do cone e os pontos R e E).

A distância de P à diretriz é dada por:

d = PP’ = OH, pois PP’HO é um retângulo.

Mas OH = RS, pois OHRS é um paralelogramo, logo, d é o comprimento da geratriz do tronco de cone.

Mas PF e PQ (em azul) são tangentes à esfera de Dandelin, portanto, PF = PQ = geratriz do mesmo tronco de cone.

Assim, os pontos da curva obtida pelo corte do plano com a superfície cônica estão a uma igual distância de um ponto fixo (F) e de uma reta fixa (diretriz).

Curvas com esta propriedade são denominadas **Parábolas**.

Essas três curvas que são obtidas com seções de planos com superfícies cônicas ganham o nome de **CÔNICAS**, e é muito interessante como essas curvas, tão parecidas em suas definições e tão diferentes em seus formatos, possuem diversas aplicações práticas. Você sabia, por exemplo,

- que a órbita dos planetas ao redor do sol não é uma circunferência e sim uma elipse que tem o sol como um de seus focos?
- que espelhos em formato parabólico são tais que todos os raios que incidem paralelamente aos seus eixos refletem passando por um ponto fixo e que isso torna as antenas parabólicas muito mais eficientes que outros tipos de antena?
- que uma companhia telefônica que deseja minimizar o transtorno gerado pela interferência dos sinais emitidos por duas antenas precisa ter conhecimentos sobre hipérboles pois as regiões que sofrem interferência destrutiva formam uma superfície hiperbólica?

Esperamos que tenhamos conseguido despertar em você curiosidades que o motivem a pesquisar e conhecer um pouco mais sobre as cônicas. Bons estudos!